UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA

HENRIQUE RODRIGUES

NIXON CÉSAR SEVERO MACHADO

OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS UTILIZANDO CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E ALGORITMOS GENÉTICOS

Tubarão/SC

2019

HENRIQUE RODRIGUES
NIXON CÉSAR SEVERO MACHADO

OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS UTILIZANDO CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E ALGORITMOS GENÉTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador Prof. Esp. Carlos Augusto Zilli.

Tubarão/SC
2019

HENRIQUE RODRIGUES
NIXON CÉSAR SEVERO MACHADO

OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS UTILIZANDO CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E ALGORITMOS GENÉTICOS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado à obtenção do título de Licenciatura em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Matemática da Universidade do Sul de Santa Catarina.

Tubarão, 05 de dezembro de 2019.

____
Professor e Orientador Carlos Augusto Zilli, Esp.
Universidade do Sul de Santa Catarina

____
Professora Vanessa Soares Sandrini Garcia, Msc.
Universidade do Sul de Santa Catarina

____
Professor Adalberto Gassenferth Junior, Msc.
Universidade do Sul de Santa Catarina

DEDICATÓRIA

Este presente trabalho é dedicado aos nossos pais, orientador e colegas de turma, que nos deram suporte e acreditaram no nosso potencial para a realização desse momento, profissional e pessoal, tão importante em nossas vidas.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Deus por nos permitir chegar onde estamos hoje, nossos pais por nos proporcionar sempre o seu melhor e nos dar base para ser a pessoa que nos tornamos, aos nossos cônjuges, por sempre nos apoiar tanto nos momentos felizes quanto nos difíceis, um agradecimento especial ao nosso orientador por toda atenção e direção fundamental para o nosso desenvolvimento acadêmico, aos professores que foram nossos mestres e nos guiaram, nos inspiraram durante toda a vida, e aos nossos colegas e amigos de curso por participarem de nosso progresso profissional e pessoal.

“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.”
Albert Einstein

RESUMO

Cada vez mais o ser humano procura soluções ótimas para seus mais diversos problemas, em busca de lucros máximos e custos mínimos. É crescente, também, as provas de vestibulares e concursos abordarem problemas de otimização, estimulando a procura por diferentes métodos de resolução. Este trabalho apresenta uma área da inteligência artificial que vem crescendo muito nos últimos anos: os algoritmos evolucionários. Estes algoritmos imitam a natureza no que se refere à procura da solução ótima, baseando-se na seleção natural de Charles Darwin. O presente estudo objetiva comparar as soluções obtidas ao se resolver problemas de máximos e mínimos utilizando algoritmos genéticos e cálculo diferencial. Os algoritmos genéticos tentam abstrair e imitar os mecanismos evolutivos na resolução de problemas que requerem adaptação, busca e otimização. Para se atingir os objetivos propostos, dois problemas de otimização aplicados em provas do ENEM, de anos anteriores, foram solucionados. Utilizamos o método de algoritmos genéticos para chegar à solução aproximada e o cálculo diferencial para chegar à solução exata. A metodologia adotada para o trabalho foi a pesquisa exploratória, através de estudo de casos. Constatou-se que, ainda que a solução de problemas de otimização por algoritmos genéticos seja, em alguns casos, aproximada, ela é ideal quando as derivadas das funções envolvidas são de complicada resolução.

Palavras-Chave: Algoritmos Genéticos. Cálculo Diferencial. Matemática.

ABSTRACT

Increasingly, humans are looking for optimal solutions to their most diverse problems, seeking maximum profits and minimum costs. It is also growing, as entrance exams and competitions address optimization problems, stimulating the search for different resolution methods. This paper presents an area of artificial intelligence that has been growing a lot in the last years: the evolutionary algorithms. These algorithms mimic nature, which does not refer to the search for the optimal solution, based on Charles Darwin's natural selection. This study aims to compare solutions that can solve upper limit problems and use genetic algorithms and differential calculus. Genetic algorithms attempt to abstract and mimic the evolutionary mechanisms in problem solving that are applicable, search and optimization. To achieve the proposed objectives, two optimization problems applied in ENEM tests from previous years were solved. Use the genetic algorithm method to arrive at the approximate solution and the differential calculation to arrive at the exact solution. The methodology adopted for the work was an exploratory research through case studies. Constant, although genetic algorithm troubleshooting is in some cases approximate, it is ideal when derived from the complicated display functions.

Keywords: Algorithms. Differential Calculation. Math.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao passar pelo ensino médio, alguns alunos se questionam sobre cálculos de valores que envolvem máximos e mínimos que uma função pode assumir. Apenas em poucos casos conseguem compreender a sua importância e, principalmente, suas aplicações.

Entretanto, a mesma problematização é passada aos alunos do ensino superior, mas com outro método de resolução. Dessa vez, utiliza-se o termo de otimização, fazendo com que eles passem a questionar mais ainda sobre as aplicações matemáticas do cotidiano e sobre os diversos métodos resolutivos de cálculos, sendo um deles, o cálculo diferencial (derivadas).

Neste trabalho iremos abordar dois métodos de resolução de problemas de otimização: o cálculo diferencial e os algoritmos genéticos. Sendo os algoritmos genéticos um grande método de resolução de problemas de otimização, iremos reproduzi-lo manualmente e, também, resolver problemas sobre o tema. Faremos o mesmo com o cálculo diferencial. Em seguida, compararemos e analisaremos os resultados obtidos.

1.1 JUSTIFICATIVA

A escolha do tema se deu pelo fato dos autores desejarem conhecer um pouco da matemática fora da própria matemática, procurando, assim, explorar o uso de outras ferramentas para obter soluções de problemas envolvendo máximos e mínimos.

Com a ciência tecnológica tendo avançado amplamente em seus conceitos e, logo, ampliado seus recursos sobre estudos na área da matemática, podemos, claramente, encontrar diversos conceitos teóricos.

O método para se encontrar máximos e mínimos de funções utilizando conceitos de derivadas é amplamente conhecido, e é uma das mais importantes aplicações. Contudo, neste trabalho, apresenta-se uma rotina utilizando algoritmos genéticos para se encontrar os pontos críticos de funções polinomiais do segundo grau.

Este estudo objetiva apresentar uma comparação prática de cálculo diferencial e de algoritmos genéticos para a resolução de problemas de otimização que apareceram em provas do ENEM de anos anteriores.

Um método muito utilizado nas escolas, nas provas e nos vestibulares para a resolução de problemas de otimização é o cálculo diferencial, que é uma ferramenta adequada quando se trata de maximização e minimização de funções cuja derivada é simples de se obter.

> "Tendo em vista que uma das primeiras aplicações do cálculo diferencial é a de encontrar a reta tangente a uma curva, que é o gráfico de uma função, passando por um determinado ponto (e essa é a interpretação geométrica da derivada de uma função), a origem do cálculo diferencial remonta aos tempos dos geômetras gregos. Alguns conceitos básicos do cálculo são conhecidos e estudados há mais de dois milênios. Esse é o caso do problema da tangente de uma curva, o qual foi analisado primeiramente por geômetras gregos, com destaque para Euclides." (Marques, 2014)

Contudo, conclui-se que a "otimização liga-se à matemática através da investigação dos máximos e mínimos locais de funções. Isto é, dos "valores estacionários da função" (que ocorrem quando a derivada se anula) se quisermos utilizar a linguagem apropriada do Cálculo Diferencial" (GUIDORIZZI, 2001; LEITHOLD, 1994).

Outro método para solucionar problemas de otimização é o de algoritmos genéticos, que apesar do nome lembrar biologia, trata-se de um algoritmo que realiza uma série de cálculos para encontrar os melhores resultados de otimização. Os algoritmos genéticos surgem, em teoria, na área biológica, e são aplicados e estudados em inteligência artificial, em cursos de ciências da computação.

> Algoritmos Genéticos são algoritmos de busca estocásticos que têm desenvolvimento e funcionamento vinculados à genética, em que todas as novas espécies são produzidas por meio de uma seleção natural em que os mais aptos sobrevivem, gerando descendentes. Cada indivíduo na população representa uma possível solução para um dado problema, o que o Algoritmo Genético faz é buscar aquela solução que seja muito boa ou a melhor do problema, analisado através da criação de população de indivíduos cada vez mais aptos, levando à otimização da função (GOLDBARG.e PACCA, 2000).

Ao falar de algoritmos genéticos devemos saber que o mesmo é um dos principais métodos de resolução de problemas de otimização, pois ele trata problemas robustos com maior facilidade e precisão.

> Os algoritmos genéticos tentam abstrair e imitar os mecanismos evolutivos à resolução de problemas que requerem adaptação, busca e otimização. Constituem uma classe de ferramentas muito versátil e robusta e quando usado como algoritmo de minimização e maximização se distingue das técnicas mais comuns de programação matemática (BARBOSA, 1997).

Os algoritmos genéticos são, portanto, uma ferramenta de inteligência artificial poderosíssima, que busca uma solução ótima (pontos críticos) para problemas que envolvem polinômios dos mais diversos graus ou até mesmo de funções não polinomiais.

1.2 TEMA DE ESTUDO

O presente trabalho de conclusão de curso tem como tema a otimização de funções polinomiais utilizando conhecimentos de cálculo diferencial e algoritmos genéticos.

1.3 DELIMITAÇÃO DO TEMA

Para este estudo, serão apresentados dois problemas referentes a provas do ENEM de anos anteriores, relacionados a máximos e mínimos. Estes problemas serão solucionados por algoritmos genéticos, a fim de se demonstrar o método e os conceitos dessa abordagem e, também, por cálculo diferencial, na busca dos pontos críticos, realizando, ao final, uma análise comparativa dessas duas metodologias.

1.4 PROBLEMÁTICA

Como problemática para este estudo busca-se responder à seguinte questão: como resolver problemas de otimização de funções polinomiais utilizando conceitos de cálculo diferencial e algoritmos genéticos?

1.5 OBJETIVO GERAL

Analisar métodos de resolução de problemas que abordem otimização de funções polinomiais e comparar os resultados obtidos pela aplicação de algoritmos genéticos e cálculo diferencial na resolução dos problemas que envolvam máximos e mínimos.

1.6 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Revisar conceitos relacionados a cálculo diferencial e algoritmos genéticos na resolução de problemas que envolvem conceitos de máximos e mínimos;

- Compreender como se aplica os algoritmos genéticos, de forma manual, para resolução de problemas os quais a modelagem recai em uma função polinomial do segundo grau;
- Demonstrar a relação entre a matemática e a computação na resolução de problemas;
- Apresentar a resolução de problemas com uso de algoritmos genéticos como alternativa para tornar as aulas de matemática mais lúdicas e dinâmicas.

1.7 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado em forma de capítulos que buscam explicar os métodos de algoritmos genéticos e cálculo diferencial e demonstrar suas aplicações na otimização de problemas envolvendo funções polinomiais.

No Capítulo 1 será apresentada uma introdução referente ao tema de pesquisa e sua delimitação, os objetivos gerais e específicos a serem atingidos, justificativa, problematização que desencadeou todo esse trabalho.

No Capítulo 2 será apresentado o conceito, referência histórica e definição de cálculo diferencial e um aprofundamento teórico sobre o assunto. Além disso, associaremos o cálculo diferencial com o termo otimização, apresentando alguns exemplos.

No Capítulo 3 será apresentado o conceito, referência histórica e definição de algoritmos genéticos, detalhando sobre suas estruturas computacionais e fazendo um aprofundamento teórico sobre o assunto, associando o tema com a otimização.

No Capítulo 4 será apresentada a metodologia a ser utilizada neste trabalho, e os problemas de máximos e mínimos que podem ser resolvidos pelos dois métodos estudados.

No Capítulo 5 será apresentada a resolução dos problemas propostos pelos dois métodos e, também, se discutirá a análise entre os resultados obtidos pelos métodos estudados.

No Capítulo 6 serão apresentadas as conclusões que chegamos ao terminar este trabalho, e, por fim, as referências bibliográficas utilizadas.

2 CÁLCULO DIFERENCIAL E A OTIMIZAÇÃO

O cálculo diferencial e integral é um dos métodos matemáticos que surgiu no estudo de funções, sendo dividido em derivadas e integrais. Como foco deste trabalho, estudaremos e utilizaremos as derivadas para resolução de problemas de otimização.

2.1 O CONCEITO DE DERIVADA

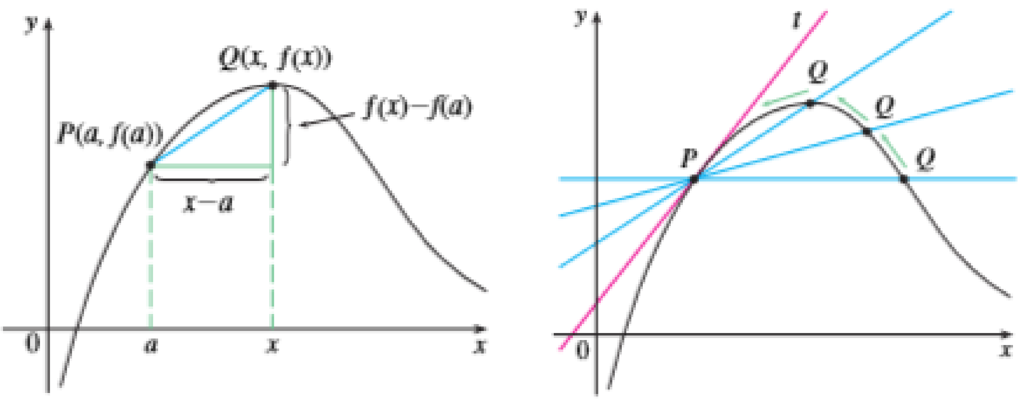
Segundo Stewart (2013), o problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto envolvem determinar o mesmo tipo de limite. Este tipo especial de limite é chamado derivada e veremos que ele pode ser interpretado como uma taxa de variação tanto nas ciências quanto na engenharia.

Segundo o autor se uma curva *C* tiver uma equação e quisermos encontrar a reta tangente a *C* em um ponto *P(a, f(a))*, consideramos um ponto próximo *Q(x,f(x))*, no qual $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante *PQ*:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Então, fazemos *Q* aproximar-se de *P* ao longo da curva *C* ao obrigar *x* tender a *a*. Se tender a um número *m*, então, definimos a tangente *t* como a reta que passa por *P* e tem inclinação *m*. (Isso implica dizer que a reta tangente é a posição-limite da reta secante *PQ* quando *Q* tende a *P*. Veja a Figura 1.)

Figura 1 – Reta tangente



Fonte: Stewart (2013).

A reta tangente à curva em um ponto é a reta passando por *P* com a inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Com a noção atual do conceito de funções, sabe-se, hoje, que esta definição é válida apenas para certa classe de funções, sendo mais adequado fazer esta abordagem introduzindo a Série de Taylor. No entanto, além da semelhança com a definição alternativa, pode-se perceber no título da obra a motivação para que o conceito de derivada ficasse livre de justificativas baseadas nos conceitos de infinitamente pequenos, evanescentes, limites e fluxões, como apresentados nas obras de Newton e Leibniz (Roque, 2012).

Segundo Pinto et al (2009, p.24): "por motivos históricos, existe mais de uma maneira de denotar a função derivada. A escolha entre notações vai depender de como vamos utilizá-la."

Para $y = f(x)$, uma função com domínio *D*, existem duas maneiras mais adotadas para denotar sua função derivada de *f*:

Notação de Newton:

$$f'(x);$$

Notação de Leibniz:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = [f(x)]$$

Ainda assim, deve-se a Cauchy grande parte da abordagem do cálculo apresentado nos atuais textos universitários, como os conceitos básicos de limite e continuidade. Pois, ainda assim, foi Cauchy quem definiu a derivada de $\boldsymbol{y = f(x)}$ em relação ao 'x' como o limite, quando $\boldsymbol{\Delta x \to 0}$, da razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Contudo, o conceito de derivada é diretamente relacionado à taxa de variação de uma função, logo, está presente no cotidiano das pessoas, como, por exemplo, a taxa de crescimento de uma população, a taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, principalmente na variação de ocasiões. Ou seja, sabemos que para uma função que possui naturalmente diversas variáveis, então, necessitaria de um cálculo um tanto quanto complexo para encontrar uma solução. Logo, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento.

2.1.1 Taxa de Variação

A Taxa de variação é uma razão relacionada a uma reta que compara a variação vertical com a horizontal, e é comumente simbolizada por *m* ou *a*. Existem várias maneiras de pensar a taxa de variação. A aproximação geralmente depende da situação.

Para qualquer função poderemos encontrar uma inclinação relacionando dois pontos no gráfico, ou seja, encontraríamos a taxa de variação na função no intervalo destes mesmos dois pontos. Logo, podemos propor: se $y = f(x)$ e x varia de x' até x'', então y varia de $f(x')$ até $f(x'')$. Assim, podemos denotar a variação em y de Δy quando a variação de x for Δx. Neste caso, a razão média de variação poderá ser representada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

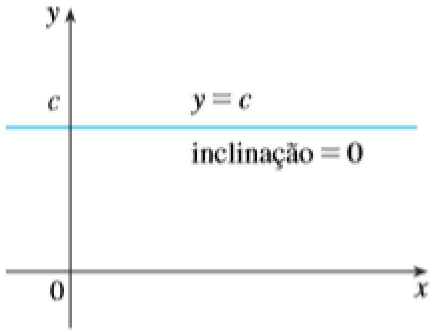
2.2 ALGUMAS REGRAS DE DERIVAÇÃO

A matemática é sempre muito bem explorada, e, através disso, o homem sempre busca métodos que visam facilitar a compreensão e execução de um problema. Isso não poderia ser diferente nas derivadas. Logo, nesta seção abordaremos algumas regras de derivação.

2.2.1 Regras fundamentais

Inicia-se com a função mais simples, a função constante. O gráfico dessa função é a reta horizontal *y = c*, cuja inclinação é *0*; Logo, devemos ter *f'(x) = 0* (veja a figura a seguir). Uma demonstração formal, a partir da definição de uma derivada, é simples:

Figura 2 – *(y = c)*



Fonte: Stewart (2013).

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Essa regra, na notação de Leibniz, é escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

2.2.1.1 Regra da Potência

Analisa-se uma função $f(x) = x^n$, na qual *n* é um número inteiro e positivo. Se *n = 1*, então o gráfico da função será uma reta *y = x*, com inclinação equivalente a *1*.

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

Para n = 4 achamos a derivada a seguir:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3\right)$$

$$= 4x^3$$

Então, a derivada de x^4:

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Pode-se perceber uma conjectura ao encontrarmos esta solução, assim, concluímos que se n for um inteiro positivo:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Através deste conhecimento, uma questão pode ser levantada: O que dizer sobre as funções potências com os expoentes negativos? Ao verificar a derivação da função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Encontra-se como resultado

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

Ainda assim, pode-se reescrever essa equação como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

de modo que a regra da potência é verdadeira quando os inteiros também são negativos. E se o expoente for uma fração?

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Que pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Segundo Stewart (2013), isso mostra que a regra da potência é verdadeira, mesmo quando n = ½. Na realidade, a regra da potência é verdadeira para todos os números reais n.

2.2.1.2 Regras da Multiplicação, Adição e Subtração

Quando novas funções são formadas a partir de outras por adição, subtração, multiplicação ou divisão, suas derivadas podem ser calculadas em termos das derivadas das funções originais. Particularmente, a fórmula a seguir nos diz que a derivada de uma constante vezes uma função é igual a constante vezes a derivada da função.

2.2.1.3 A Regra da Multiplicação por Constante

Se c for uma constante e *f* uma função derivável, então

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

Logo, para sua resolução

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} c[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}]$$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= cf'(x)$$

Veja os exemplos a seguir:

A)

$$\frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$$

B)

$$\frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}[(-1)x] = \frac{(-1)d}{dx}(x) = (-1)1 = -1$$

2.2.1.4 A Regra da Soma

A regra a seguir nos diz que a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas das funções. Se *f* e *g* forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Sendo assim,

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h) - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} [\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

A Regra da Soma pode ser estendida para a soma de qualquer número de funções. Por exemplo, usando esse teorema duas vezes, obtemos

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

2.2.1.5 A Regra da Subtração

Escrevendo *f – g* como *f + (-1)g* e aplicando a Regra da Soma e a Regra da Multiplicação por Constante, obtemos a seguinte fórmula:

Se f e g forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

2.2.2 Regra do Produto e Quociente

As fórmulas desta seção nos permitem derivar novas funções a partir de funções conhecidas por multiplicação e divisão.

2.2.2.1 A Regra do Produto

O produto das derivadas é igual à derivada da primeira função multiplicada pela segunda função mais a primeira função multiplicada pela derivada da segunda função.

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Segundo Freitas (2014), para compreender, considere a função $p(x) = (x^2 + x + 2)(3x - 1)$. Perceba que ela é uma função expressa como produto de duas funções. Usando o caminho mais curto para chegar à derivada, isto é, usando a fórmula do produto para encontrar a derivada, teremos:

$$p'(x) = (x^2 + x + 2)'(3x - 1) + (x^2 + x + 2).(3x - 1)'$$

$$p'(x) = (2x + 1).(3x - 1) + (x^2 + x + 2).3$$

$$p'(x) = 6x^2 - 2x + 3x - 1 + 3x^2 + 3x + 6$$

$$p'(x) = 9x^2 + 4x + 5$$

Entretanto, poderíamos expandir p(x), ou seja, efetuar a multiplicação, chegando à função expressa como: $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 2$. Dessa forma, usando os caminhos para derivar potência e soma de funções obteríamos, também, a derivada:

$$p'(x) = 9x^2 + 4x + 5$$

2.2.2.2 A Regra do Quociente

A regra do quociente se dá quando tem-se uma função dividindo outra e pretende-se encontrar sua derivada, logo, segundo Freitas (2014) “a derivada do numerador vezes o denominador menos o numerador vezes a derivada do denominador, tudo divido pelo denominador ao quadrado.”

Ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(f'(x).g(x) - f(x).g'(x)\right)}{[g(x)]^2}$$

Para uma melhor compreensão, considere a derivada da função

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$$

Agora, utilizando o caminho mais curto (regra)

$$y' = \frac{(x^3 - 1)'.(x^3 + 1) - (x^3 - 1).(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^2(x^3+1) - (x^3-1).3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{3x^5 + 3x^2 - (3x^5 - 3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{3x^5 + 3x^2 - 3x^5 + 3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$$

Portanto,

$$y' = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$$

2.2.3 Regra da Cadeia

Em alguns casos a complexidade de uma derivação será maior, como poderia acontecer em uma função composta. Para estas, utilizaremos outra regra: a da cadeia.

Segundo Stewart (2014), se assumirmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2$, então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$. Sabemos como derivar ambas, *f* e g, então, seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de $F = f \circ g$ em termos de derivadas de *f e g*.

O resultado é que a derivada da função composta é o produto das derivadas de *f e* g. Esse fato é um dos mais importantes das regras de derivação e é chamado Regra da Cadeia. Ela parece plausível se interpretarmos as derivadas como taxas de variação.

Considere

$$\frac{du}{dx}$$

Como a taxa de variação de *u* com relação a *x*

$$\frac{dy}{du}$$

Como a taxa de variação de *y* em relação a *u*, e

$$\frac{dy}{dx}$$

Como a taxa de variação de *y* em relação a *x*.

Se *u* variar duas vezes mais rápido que *x*, e *y* variar três vezes mais rápido que *u*, então parece plausível que *y* varie seis vezes mais rápido que *x* e, portanto, esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Logo, se *g* for derivável em *x* e *f* for derivável em *g(x)*, então a função composta $F = f \circ g$ definida por $F(x) = f\big(g(x)\big)$é derivável em *x* e *F'* é dada pelo produto

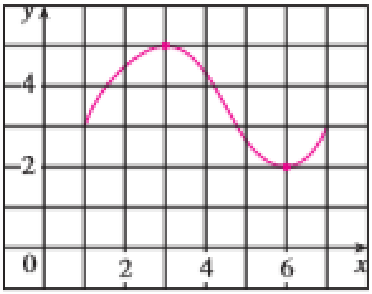
$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

2.3 APLICAÇÃO EM ANÁLISE DE FUNÇÕES

2.3.1 Valores Máximos e Mínimos

Uma das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os problemas de otimização, em que devemos encontrar a melhor maneira (maneira ótima) de se resolver algo. Geralmente são problemas que visam encontrar um valor máximo ou mínimo, que sempre serão representados por uma função. Utilizaremos o gráfico a seguir para uma melhor demonstração

Figura 3 – Função de terceiro grau qualquer



Fonte: Stewart (2013).

Vemos que o ponto mais alto no gráfico da função *f* mostrado na figura é o ponto *(3, 5)*. Em outras palavras, o maior valor de *f é f (3) = 5*. Da mesma forma, o menor valor é *f (6) = 2*. Dizemos que *f (3) = 5* é o máximo absoluto de *f* e *f (6) = 2* é o mínimo absoluto. Em geral, usamos a seguinte definição:

Seja c um número no domínio *D* de uma função *f*. Então *f (c)* é o

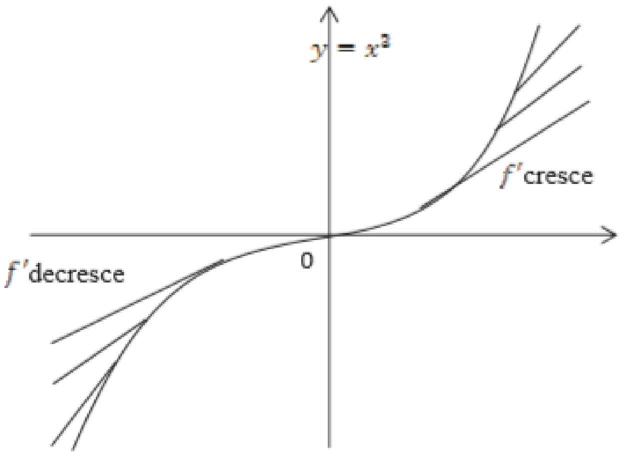
- valor máximo absoluto de *f* em *D* se $f(c) \geq f(x)$ para todo *x* em *D*.
- valor mínimo absoluto de *f* em *D* se $f(c) \leq f(x)$ para todo *x* em *D*.

2.3.2 Concavidade e Crescimento

Nesta seção veremos como o cálculo diferencial nos fornece informações sobre como a curva de uma função derivável se inclina e/ou muda de direção. Esta informação nos permite analisar o comportamento gráfico de tal.

Para isso, utilizaremos a função $f(x) = x^3$ como exemplo:

Figura 4 – $f(x) = x^3$



Fonte: Stewart (2013).

Note que o gráfico dessa função possui uma concavidade voltada para baixo no intervalo de *(-∞, 0)*, e no intervalo de *(0, ∞)* sua concavidade se volta para cima.

Podemos notar que a curva é crescente conforme aumenta, porém se curvam de maneiras distintas nos intervalos de *(-∞, 0)* e *(0, ∞)*. Quando se percorre a curva em direção à origem, a partir da esquerda nota-se que ela se volta para a direita e fica abaixo de suas tangentes. Pois os coeficientes angulares das tangentes são decrescentes no intervalo *(-∞, 0)*. Ainda nesse sentido, se continuar percorrendo a curva para a direita, pelo intervalo *(0, ∞)*, percebe-se que ela se volta, agora, para a esquerda, ficando acima de suas tangentes, pois, agora, os coeficientes angulares das tangentes são crescentes nesse intervalo. Esse comportamento de inclinação e mudança de sentido define a concavidade da curva.

Com isso, conclui-se que o gráfico de uma função derivável $y = f(x)$ é

a) Côncavo para cima em um intervalo aberto I, se f' é crescente em I;

b) Côncavo para baixo em um intervalo aberto I, se f' é decrescente em I;

E para o teste da segunda derivada para a concavidade, considerando uma função $y = f(x)$ sendo duplamente derivável.

a) Se $f'' > 0$ em I, o gráfico de f ao longo de I é côncavo para cima.

b) Se $f'' < 0$ em I, o gráfico de f ao longo de I é côncavo para baixo.

2.4 EXEMPLOS DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

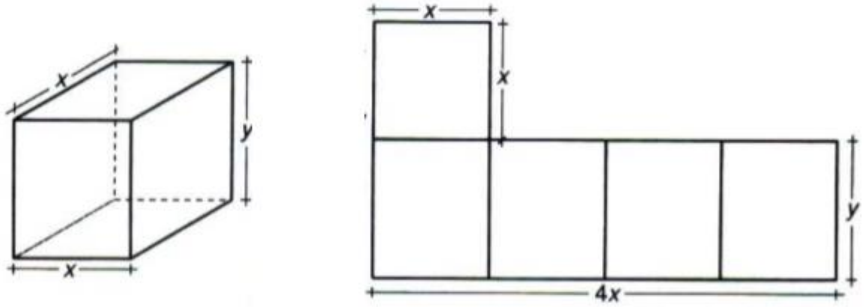
Como aponta Feitosa (2010), o termo otimização se refere ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável. Então, temos como premissa a ideia de que, ao utilizarmos o verbo "otimizar", estamos nos referindo a algo que queremos melhorar até o ponto máximo, permitido que alcance um determinado estado de "suposta perfeição" dentro dos próprios limites do objeto, situação e natureza.

A partir disso, o conceito se torna viável para utilização em problemas, sendo, assim, propício a resolução. Para que isso aconteça, é necessário escrever precisamente qual a função que deverá ser analisada. Essa função poderá ser escrita em função de uma ou mais variáveis. Quando a função é de mais de uma variável, devemos procurar expressar uma das variáveis em função da outra. Já com a função definida, devemos identificar um intervalo apropriado e, então, proceder a rotina matemática aplicando definições e teoremas.

2.4.1 Problema com Custo da Construção de Caixas

Observando a figura, escrevemos a função que dá o custo do material:

Figura 5 – Caixa



Fonte: Flemming et al.

$$C = x^2 .\ 1200{,}00 + 4xy.980{,}00$$

Como $V = x^2y\ = 2500cm^3$, temos que a dimensão de y pode ser escrita como $y = 2500/x^2$. Substituindo esse resultado, obtemos

$$C(x) = 1200{,}00.x^2 + \frac{9800000{,}00}{x}$$

Que é a função que queremos minimizar. Temos:

$$C'(x) = \frac{2400{,}00x^3 - 9800000{,}00}{x^2}$$

Igualando essa equação a zero, e resolvendo-a, encontramos:

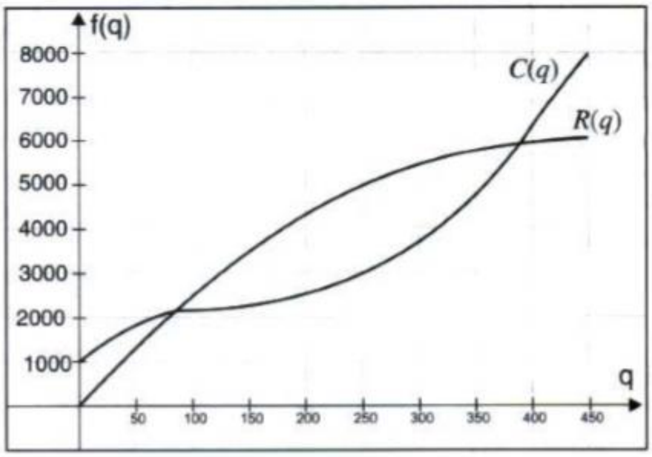
$$x = 5\left(\sqrt[3]{\frac{98}{3}}\right) \cong 15{,}983$$

Sendo esse dado em metros, 15,983*m*, que é o ponto crítico que nos interessa. De fato, para $x \cong 15{,}983m$ vamos ter um ponto de mínimo, já que $C''(15{,}983) > 0$. Portanto, as dimensões da caixa de modo a obter o menor custo são $x \cong 15{,}983m$ e $y \cong 9{,}785m$.

2.4.2 Problema sobre Receita e Custo Total

A receita e o custo total com a produção e a comercialização de um produto são dados pelas curvas *R* e *C* da figura. Determinar o nível de produção que maximiza o lucro.

Figura 6 – Gráfico receita X custo



Fonte: Flemming et al.

O lucro *L* é dado pela diferença entre a receita e o custo, ou seja, $L = R - C$

Observando os gráficos de *R* e *C*, podemos verificar que o nível de produção que maximiza o lucro é aproximadamente $q = 250$. O lucro máximo é:

$$L(250) = R(250) - C(250)$$

$$= 5000 - 3000$$

$$= 2000$$

É interessante observar que a análise gráfica nos permite estimar qual o intervalo em que pode variar o nível de produção para que a empresa tenha lucro. Se a produção deve ocorrer em lotes de 50 unidades, esse intervalo é de $q = 100$ até $q = 350$ unidades.

Também é interessante observar que no nível de produção correspondente ao lucro máximo, as curvas R e C tem tangentes paralelas. Isso equivale a dizer que $R' = C'$, isto é, a receita é igual ao custo. Como $L' = R' - C'$, temos $L' = 0$ nesse ponto, ou seja, $q = 250$ é o ponto crítico de L.

Assim, o exemplo ilustra como a análise gráfica e analítica conduzem ao mesmo resultado. Em geral, a utilização de uma ou outra depende das informações disponíveis.

3 ALGORITMOS GENÉTICOS E A OTIMIZAÇÃO

Com o grande crescimento de tecnologias e seus avanços no estudo da matemática, sendo explorada como ferramenta em diversas áreas de conhecimento, cresce, também, o uso de métodos computacionais para realizar cálculos e solucionar problemas com mais eficiência. Porém, para que isso aconteça, é necessário saber se comunicar com o computador, ou seja, uma linguagem na qual ele entenda e trabalhe para que torne possível programar uma rotina que realize o objetivo desejado.

3.1 O QUE SÃO ALGORITMOS?

Algoritmos são conjuntos de instruções finitas, com início e fim, idealizados para resolver problemas ou realizar tarefas. Desse modo, podemos dizer que o algoritmo na computação, assim como na matemática, é um modelo, um conjunto de regras ou procedimentos que devem ser seguidos para resolução de um determinado problema.

Ainda assim, os algoritmos não são necessariamente programas de computador, mas sim um conjunto de procedimentos a ser realizados para alcançar o resultado desejado. Segundo Dasgupta, Papadimitriou e Vazirani (2006), algoritmos são procedimentos precisos, não ambíguos, mecânicos, eficientes e corretos.

Desse modo, algoritmos não possuem dupla interpretação, não há como ler o mesmo algoritmo de formas diferentes, se o algoritmo estiver correto, alcançará o resultado satisfatório, nem sempre esse resultado será o melhor ou mais eficiente, porém, irá satisfazer o problema.

Os melhores algoritmos são aqueles os quais a solução satisfaz o problema de forma mais rápida, simples e eficaz. Logo, ressalta-se que quanto mais específico o algoritmo for, maior será a precisão e eficiência de seus resultados.

Mas por que usar algoritmos para solucionar problemas? Bom, a resposta é um pouco óbvia: os algoritmos, se escritos de forma correta, tendem a chegar à solução de forma mais rápida e eficaz, o principal fator é a diferença de tempo, que pode ser de minutos ou até mesmo anos, assim como o tamanho ou proporção do problema, também é um diferencial, uma vez que ele não se importa com o tamanho do problema.

3.2 COMPUTAÇÃO EVOLUTIVA (CE)

Com a necessidade de solucionar problemas de modo que a computação não estagnasse, ou seja, continua-se evoluindo e acompanhando a evolução da humanidade, notou-se que sempre estiveram diante de um exemplo de eficiência em evolução: a natureza. Assim, baseado na seleção natural de Darwin de 1859, criou-se a computação evolutiva ou evolucionária.

A CE é uma área de pesquisa no ramo de inteligência artificial, tendo como principal frente de pesquisa os Algoritmos Genéticos (AG) e a Programação Genética (PG).

Sendo o foco deste trabalho e grande ferramenta na inteligência artificial. Os AGs possuem uma larga aplicação em muitas áreas científicas, entre as quais podem ser citados problemas de otimização, aprendizado de máquina, desenvolvimento de estratégias e fórmulas matemáticas, análise de modelos econômicos, problemas de engenharia, diversas aplicações na biologia como simulação de bactérias, sistemas imunológicos, ecossistemas, descoberta de formato e propriedades de moléculas orgânicas (Mitchell, 1997).

Programação Genética (PG) é uma técnica de geração automática de programas de computador criada por John Koza em 1992, inspirada na teoria de AGs de Holland. Na PG é possível criar e manipular software, aplicando conceitos herdados da biologia para gerar programas de computador automaticamente.

> PG e AGs representam um campo novo de pesquisa dentro da Ciência da Computação. Neste campo muitos problemas continuam em aberto e a espera de novas soluções e ferramentas. Apesar disso, este paradigma vem se mostrando bastante poderoso e muitos trabalhos vêm explorando o uso de AGs e PG para solucionar diversos problemas em diferentes áreas do conhecimento desde mineração de dados e biologia molecular até o projeto de circuitos digitais e inúmeras tarefas envolvendo otimização (O'NEIL; RYAN, 2000).

Ambas as técnicas compartilham a mesma base teórica, inspirada na competição entre indivíduos pela sobrevivência, porém uma não depende da outra. A diferença essencial entre AG e PG é que em PG as estruturas manipuladas são muito mais complexas, assim como várias das operações realizadas pelo algoritmo.

3.3 CONTEXTO BIOLÓGICO

O nascimento da computação evolutiva foi inspirada na biologia, mais precisamente na seleção natural. Dessa forma, todos os seus processos de resolução e a maioria de suas terminologias estão diretamente ligados à biologia, tais como: mutação, recombinação crossover, genes, cromossomos, entre outros. Segundo Linden (2008, p.40):

> Os algoritmos evolucionários funcionam mantendo uma população de estruturas denominada indivíduos ou cromossomos, que se comportam de forma semelhante á evolução das espécies. A estas estruturas são aplicadas os conhecidos operadores genéticos (aproximações computacionais de fenômenos vistos na natureza) como recombinação e mutação, entre outros. Cada indivíduo recebe uma avaliação que é uma quantificação de sua qualidade como solução do problema em questão. Com base nessa avaliação serão aplicados os operadores genéticos de forma similar a sobrevivência do mais apto. (LINDEN, 2008)

Observa-se no exemplo feito por Linden (2008):

Pseudo-Código

- T:=0
- Inicializa_População P(0)
- Enquanto não terminar faça
  - Avalie_População P(t)
  - P':=Selecione_Pais P(t)
  - P'=Recombinação_e_mutação P'
  - Avalie_População P'
  - P(t+1)=Selecione_sobreviventes P(t),P'
  - t:=t+1

Fim enquanto

- Inicializa o contador de tempo
- Inicializa a população aleatoriamente
- Condição término: por tempo, avaliação
- Avalia a população no instante 't'
- Seleciona a subpopulação que gerará uma nova população
- Aplica os operadores genéticos
- Avalia a nova população
- Seleciona sobreviventes desta geração
- Incrementa o contador de tempo

Nesse algoritmo, percebe-se que o funcionamento consiste em buscar soluções que possuam melhores características dentro da atual população (função *Selecione_Pais*) e tentar combiná-las para gerar soluções melhores ainda (função *Recombinação_e_mutação*). Repete-se o processo por tempo suficiente ou até alcançar uma solução satisfatória.

Cada processo do algoritmo busca fazer com que cada geração seja diferente da anterior, aplicando cruzamento (*crossover*) e mutação, tornando a diversidade maior. Desse modo, as chances de surgir um indivíduo melhor que os já existentes aumentam. Nota-se que sua semelhança não está somente em terminologia, mas, também, em seu comportamento e processo de seleção do melhor indivíduo.

3.4 COMPONENTES DE ALGORITMO EVOLUCIONÁRIO

Os algoritmos genéticos são algoritmos de otimização comumente utilizados na inteligência artificial. Eles fazem parte de um ramo dos algoritmos evolucionários, e, como tal, podem ser definidos como uma técnica de busca, baseada numa metáfora do processo biológico de evolução natural. Tendo suas terminologias inspiradas na biologia, assim como o próprio algoritmo evolucionário, há, também, uma analogia dos termos usados nas AGs com os usados na biologia.

3.4.1 Representação

Sabe-se que cada termo tem sua representação, função e significado dentro dos algoritmos genéticos. Lembrando que todos os termos possuem como origem a biologia, e, de certo modo, seu significado e aplicação ligados a ela. Na tabela a seguir têm-se seus termos e significados nos AGs.

Tabela 1 - Representação e significado dos termos.

TERMO	ALGORÍTMO GENÉTICO
Cromossomo	Indivíduo, cromossomo
Gene	Característica
Alelo	Valor
Locus	Posição
Genótipo	Estrutura
Fenótipo	Conjunto de Parâmetros

Fonte: os autores.

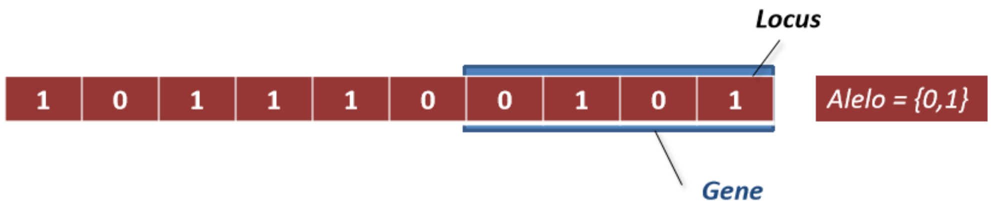
3.4.1.1 Cromossomos

Na biologia, segundo Santos (2016), os cromossomos são estruturas formadas por uma molécula de DNA associada a moléculas proteicas. Sendo assim, é o lugar onde estão introduzidas todas as informações do indivíduo. Enquanto nos AGs, os cromossomos são a forma como introduzimos as informações visando obter resultados que satisfaçam o problema com maior precisão. Um cromossomo pode ter sua codificação binária, vetor, ou qualquer informação que se adeque ao problema.

> [...]ela consiste em uma maneira de traduzir a informação do nosso problema em uma maneira viável de ser tratada pelo computador. Quanto mais ela for adequada ao problema, maior sua qualidade dos resultados obtidos. (LINDEN, 2006)

Desse modo, o problema não deve adaptar a informação, mas sim o contrário, para obter resultados mais precisos e satisfatórios.

Figura 7 – Representação de cromossomo, gene, locus e alelo.



Fonte: Algoritmos genéticos – Universidade tecnológica do Paraná.

Pode-se observar um cromossomo binário na figura acima, que também destaca um gene, um locus e os valores possíveis para um alelo no cromossomo.

Ressalta-se que a codificação do cromossomo é muito importante, podendo influenciar no desempenho do algoritmo. Sendo assim, deve-se escolher o tipo de codificação que se adapte e satisfaça o problema em questão.

3.4.1.2 Gene

Na biologia, segundo Izabel (2011), um gene é uma sequência de nucleotídeos distintos que fazem parte de um cromossomo, ou seja, gene é cada pedaço de um cromossomo, enquanto em um AG é uma parte de um cromossomo, delimitados ou de forma arbitrária ou por um ponto de corte. Observa-se, na figura 7, um gene em destaque.

3.4.1.3 Locus

Dentro da biologia, segundo Izabel (2011), o locus é a posição específica ocupada por qualquer gene, em um cromossomo. Observa-se na figura 7, que o mesmo se aplica em um AG.

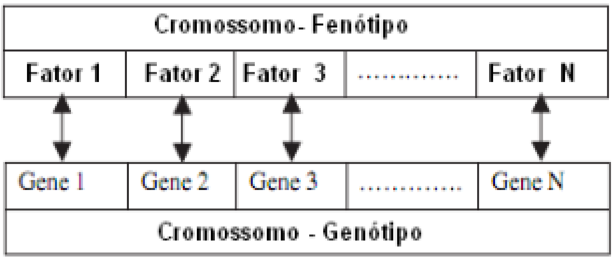
3.4.1.4 Alelo

Segundo Izabel (2011), para a biologia, são genes que se unem para formar uma determinada característica, ou seja, é uma informação ou característica de um locus dentro de um gene. Em um AG, são os valores possíveis para qualquer locus. Observa-se que, na figura 7, o alelo é o *1* e *0*, pois são estes os possíveis valores que se pode encontrar em qualquer locus.

3.4.1.5 Genótipo

Izabel (2011) afirma que o genótipo é a constituição genética de um organismo (conjunto de genes) e, portanto, de qualquer indivíduo, e determina uma de suas características (fenótipo). O genótipo é a base do fenótipo, que é a expressão das características físicas e mentais codificadas pelos genes e modificadas pelo ambiente, tais como cor dos olhos, inteligência etc. É um conjunto de características formadas por genes. Em um AG, é o conjunto de valores de um gene. Por exemplo: gene binário sendo *101*, o seu genótipo é *101*.

Figura 8 – Representação da relação genótipo e fenótipo.



Fonte: SILVA, Deam J.A (2012).

Observa-se que a figura mostra uma relação entre genótipo: o quanto um está ligado ao outro, visto que um faz parte do outro.

3.4.1.6 Fenótipo

Na biologia, segundo Izabel (2011) os fenótipos são as características resultantes da interação do meio e de seu conjunto de genes (genótipo). No AG, o fenótipo é formado pela combinação de genótipos. Por exemplo: sendo o genótipo *101*, onde *1* indica a presença de uma característica e *0* a falta de uma, o fenótipo é determinado pela combinação dessas características. Logo, ao decodificar *101*, obteríamos o valor *5* como fenótipo.

3.4.2 Função de Avaliação (Função Fitness)

A função de avaliação da população é utilizada para verificar a qualidade de um indivíduo como solução do problema em questão. Sendo assim, é dado uma nota a cada indivíduo, agindo como modo de diferenciar as melhores e as piores soluções de um problema. É nela que se baseiam na hora de ocorrer a seleção de pais, assim sendo escolhidos os cromossomos que possuam a melhor avaliação.

Para Linden (2008), como algoritmos genéticos são técnicas de maximização, a função avaliação deve ser tal que se o cromossomo *c1* representa uma solução melhor que o cromossomo *c2*, então a avaliação de *c1* deve ser maior que a avaliação de *c2*.

A função de avaliação tem o papel de apresentar os requisitos para a adaptação, ela é o parâmetro para a seleção dos genótipos pais que darão origem a novos representantes mais adaptados ou não. (SIQUEIRA JUNIOR, 2015).

O seu objetivo é privilegiar os indivíduos com avaliações altas, mas sem desprezar completamente os com avaliações baixas. Desse modo, ao selecionar os mais bem avaliados e gerar um filho, o mesmo deve ter uma avaliação melhor que a dos pais.

> [...]é muito importante que a função de avaliação tenha um contradomínio estritamente positivo, isto é, que nenhum indivíduo da população tenha avaliação negativa ou zero. Isto faria com que a soma das avaliações diminuísse, impedindo que o módulo de seleção de pais tenha um desempenho adequado[...]. (LINDEN, 2008)

Sendo assim, não há um modelo ou uma receita pronta para a função avaliação, ou seja, para achar a função que se adapte melhor ao problema em questão. Por esse motivo, para encontrar essa função satisfatória, possivelmente precisará de algumas tentativas até obter a função ideal.

3.4.3 População

Nos algoritmos genéticos, população se refere a conjunto de cromossomos ou indivíduos de tamanho finito, tendo sua escolha da forma mais simples possível, visando sempre o mais apto para o problema. Desse modo, tornando mais eficaz seu algoritmo, assim como sua solução.

> O algoritmo começa um conjunto de soluções (representadas por cromossomos) chamados população. Soluções de uma população são utilizadas para formar uma nova população. Isto é motivado pela esperança que a nova população será melhor do que a primeira. Soluções que são selecionadas para formar novas gerações de soluções são selecionadas de acordo com sua adequação - quanto melhores, mais chances de reprodução terão. (OBITKO, 1998)

O algoritmo começa com um conjunto de cromossomos, os quais são selecionados de dois em dois (selecionar os pais) para ocorrer o crossover e mutação, assim, gerando um novo conjunto de cromossomos (nova geração) que será diferente da anterior, seguindo, desse modo, até o momento que não haja mais novas gerações. Feito isso, procura-se na população total a melhor solução que satisfaça o problema.

Observa-se, abaixo, um esboço do tratamento da população feito por Marek Obitko:

1- [Início] Gere uma população aleatória de n cromossomas (soluções adequadas para o problema)
2- [Adequação] Avalie a adequação f(x) de cada cromossoma x da população
3- [Nova população] Crie uma nova população repetindo os passos seguintes até que a nova esteja completa
  1- [Seleção] Selecione, de acordo com sua adequação (melhor adequação, mais chances de ser selecionado), dois cromossomas para serem os pais
  2- [Cruzamento] Com a probabilidade de cruzamento, cruze os pais para formar a nova geração. Se não realizar cruzamento, a nova geração será uma cópia exata dos pais.
  3- [Mutação] Com a probabilidade de mutação, altere os cromossomas da nova geração nos locus (posição nos cromossomas).
  4- [Aceitação] Coloque a nova descendência na nova população
4- [Substitua] Utilize a nova população gerada para a próxima rodada do algoritmo
5- [Teste] Se a condição final foi atingida, pare e retorne a melhor solução da população atual
6- [Repita] Vá para o passo **2.**

Lembre-se sempre de que apesar de ser bastante simples ou genérico, o algoritmo pode ser implementado conforme a situação exija. É importante destacar o tipo de codificação (binário, vetor e etc..) do cromossomo, pois o mesmo implica muito na eficiência do algoritmo.

3.4.4 Seleção de Reprodutores

A seleção de reprodutores ocorre se baseando na função avaliação, selecionando os reprodutores com melhor avaliação para gerarem filhos para a nova geração.

> método de seleção de pais deve simular o mecanismo de seleção natural que atua sobre as espécies biológicas, em que os pais mais capazes geram mais filhos, ao mesmo tempo que os menos também geram descendentes. Consequentemente, temos que privilegiar os indivíduos com função de avaliação alta, sem desprezar completamente aqueles indivíduos com função avaliação extremamente baixa. (LINDEN, 2008)

Os AGs não descartam totalmente os indivíduos com avaliação baixa, pois os eles podem conter alguma característica que ajude a gerar um filho que possuam características que influenciem na criação ou geração do indivíduo que seja a melhor solução para o problema em questão.

> Caso tivermos uma seleção muito forte, onde os indivíduos com alta avaliação tiverem uma chance muito maior que os de baixa avaliação de serem selecionados, os indivíduos com as melhores avaliações irão prevalecer muito rapidamente na população, reduzindo a diversidade necessária para o bom desempenho do AG. Por outro lado, se tivermos uma seleção muito fraca, onde os indivíduos com avaliação baixa tiverem uma chance de serem selecionados muito próxima dos com alta avaliação, o algoritmo terá uma evolução muito lenta, tomando muito tempo de CPU, ou sem um resultado final satisfatório (MELANIE, 1996).

A seleção ideal é a chance dos indivíduos com avaliação alta não seja imensa para a chance dos indivíduos de baixa avaliação. Dessa maneira, mantem-se a diversidade e o desempenho do AG sem tomar tempo excessivo.

3.4.5 Operadores de Variação

Para manter a diversidade de um AG e assim obter possíveis melhores soluções, é necessária a aplicação de operadores de variação, sendo eles a mutação e o *crossover* (cruzamento).

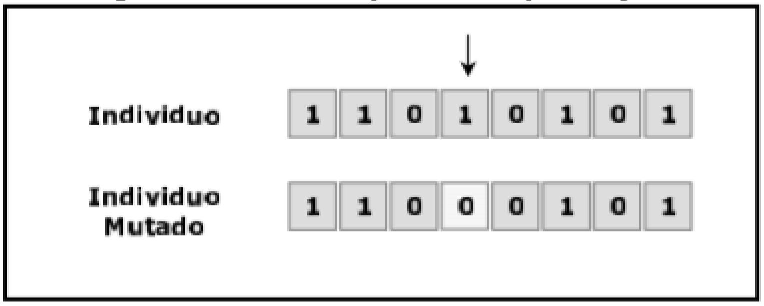
> No processo de reprodução ocorre a combinação de cromossomos entre si, com intuito de gerar indivíduos diferentes na próxima geração, para que essa variação aconteça com mais eficiência, utiliza-se dois operadores de variação, a mutação e a recombinação genética (crossover). Enquanto a mutação altera de uma propriedade específica de forma randômico fornecendo novas alternativas para o ambiente de simulações, o crossover funde propriedades de duas soluções individuais, a fim de formar uma nova solução, que tem o potencial de utilizar as boas propriedades dos indivíduos pais. (DUGAN; ERKOÇ, 2009)

A aplicação de somente um dos operadores pode ser o necessário para manter a variedade da população. Além disso, não há uma ordem de aplicação dos operadores de variação.

3.4.5.1 Mutação

A mutação age diretamente na modificação de um ou mais alelos de forma aleatória. Desse modo, as modificações ocorrem em diferentes segmentos, garantindo uma variedade maior de genótipos a cada mutação.

Figura 9 – Demonstração de mutação simples.



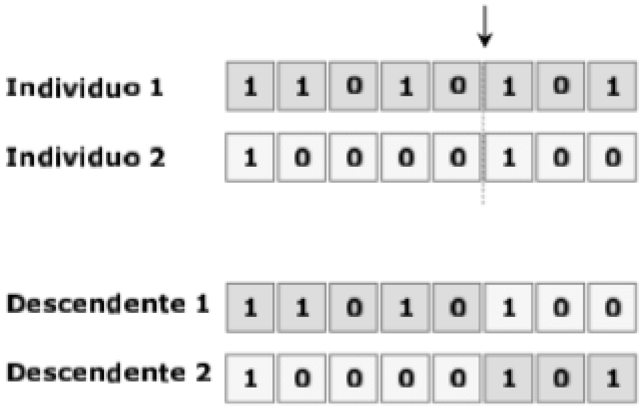
Fonte: Computação evolutiva – Universidade Federal do Paraná.

Ao aplicar a mutação, altera-se um alelo. Sendo assim, ao aplicar o crossover, ocorre a possibilidade do filho ser diferente dos pais. Dessa maneira, a variedade da população melhora, além de ter uma nova possível solução para o problema em questão.

3.4.5.2 Crossover

O cruzamento é denominado *crossover*, em que dois cromossomos fornecem aos filhos partes extraídas a partir de pontos de corte escolhidos aleatoriamente. Em seguida, as partes de um cromossomo (gene) são trocadas com os genes do outro, de forma que gere um novo indivíduo, diferente dos pais geradores.

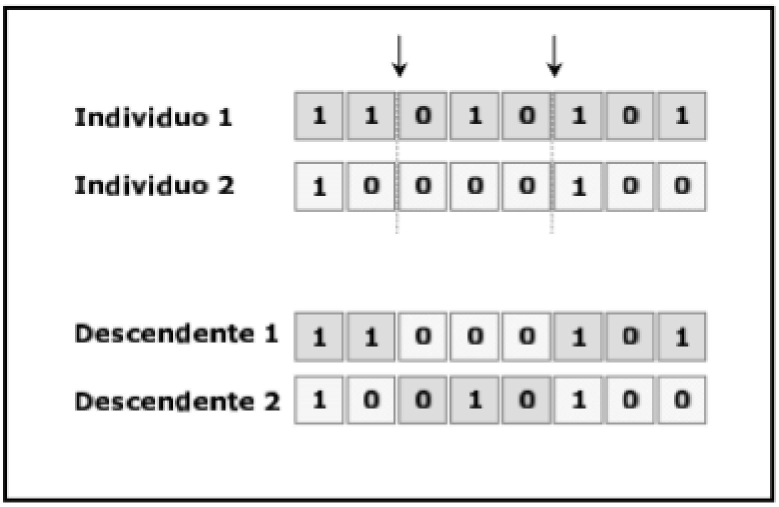
Figura 10 – Crossover com um ponto de corte.



Fonte: Computação Evolutiva – Universidade Federal do Paraná.

Sabendo que no *crossover* pode haver um único corte ou múltiplos cortes realizados de forma aleatória, também pode se aplicar pontos de cortes diferentes de *crossover* para *crossover* sem a necessidade de esperar trocar a geração. Observa-se, a seguir, um exemplo de múltiplos cortes.

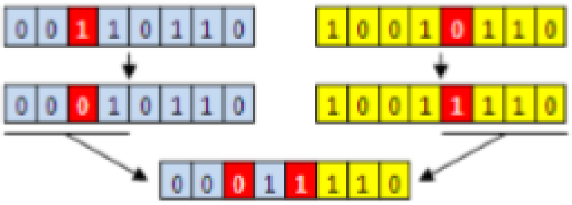
Figura 11 – Crossover com dois pontos de corte.



Fonte: Computação evolutiva – Universidade Federal do Paraná.

Segundo Dugan e Erkoç (2009), as operações de mutação e cruzamento são mostradas em cadeias binárias de 8 bits de comprimento. Conforme a imagem abaixo, onde os bits vermelhos mostram a operação de mutação dos bits alternados e a última linha mostra o indivíduo filho formado pela operação de cruzamento de partes mescladas dos indivíduos pais.

Figura 12 – Demonstração de crossover e mutação.



Fonte: Dugan; Erkoç – Algorithms – 2009.

Observa-se o fato de não haver uma ordem nos processos, os autores aplicaram primeiro a mutação, e em seguida realizam o *crossover*, utilizando os alelos que sofreram mutação, gerando, assim, um filho diferente e aumentando a variedade da população.

3.4.6 Seleção de Sobreviventes

A seleção de sobreviventes trata-se da última etapa dos operadores de variação, ou seja, aplica-se após eles serem realizados.

> Esses dois processos geradores de variação nem sempre produzem indivíduos que são melhor adaptados de acordo com os critérios de adequação e, portanto, também é necessário um mecanismo de seleção para buscar melhores soluções em um conjunto de indivíduos recém-nascidos. (DUGAN; ERKOÇ, 2009)

Nessa etapa os indivíduos da população antiga são substituídos por novos indivíduos. Para a seleção desses sobreviventes utilizam-se dois métodos:

- Atualização de geração – Há uma substituição completa de população. Ou seja, gera-se uma prole de população *N* pra substituir a população anterior inteira.
- Estado estacionário – Há uma substituição parcial. Desse modo, selecionam-se os indivíduos mais antigos ou então com menor função avaliação.

3.5 MECANISMOS DE SELEÇÃO DO REPRODUTOR

Com a necessidade de escolher indivíduos para reprodução, surge a necessidade de utilizar métodos que realizem esse processo. Segundo Souza (2014, p.23), “[...] a operação de seleção é feita baseado no valor retornado pela função de aptidão de cada indivíduo. Existem vários métodos diferentes para realizar a seleção, cada um com suas vantagens e desvantagens.”. Logo, deve-se escolher a seleção que melhor se adapte ao problema, com base em seus prós e contras.

3.5.1 Seleção por Ranking

Trata-se de um método alternativo que mantêm a pressão seletiva no mesmo nível da primeira até a última geração, no intuito de prevenir a dominância de super-indivíduos e uma convergência prematura. Sua avaliação é dada pela equação:

$$E(i,t) = Min + (Max - Min) * \frac{rank(i,t) - 1}{N - 1}$$

Sendo *Min* o valor da menor avalição de um indivíduo, *Max* a maior avaliação de um indivíduo, *N* o tamanho da população e rank (*i*,*t*) a posição da avalição do indivíduo *i* na no rank da menor para a maior avaliação, na geração *t*.

Figura 13 – Seleções por torneio e ranking.

Indivíduo	Avaliação bruta	Roleta %
x1	120	2,44
x2	15	0,31
x3	30	0,61
x4	100	2,03
x5	1000	20,35
x6	250	5,09
x7	5	0,10
x8	350	7,12
x9	45	0,92
x10	2500	50,86
X11	500	10,17

Ordenando os indivíduos:
x7, x2, x3, x9, x4, x1, x6, x8, x11, x5, x10

Indivíduo	Avaliação ranking	Roleta %
x1	1,5	9,09
x2	1,1	6,67
x3	1,2	7,27
x4	1,4	8,48
x5	1,9	11,52
x6	1,6	9,70
x7	1	6,06
x8	1,7	10,30
x9	1,3	7,88
x10	2	12,12
X11	1,8	10,91

Fonte: Souza (2014).

Observa-se que a primeira tabela considera o valor bruto, avaliando a solução divido pelo somatório das soluções. Desse modo, há uma diferença grande entre as avaliações. Com isso, cria-se super indivíduos, fazendo com que a diversidade da população diminua. Contudo, na segunda tabela, realizou-se avaliação por ranking, transformando o valor bruto em uma classificação entre *1* e *2*, em que o menor valor bruto é *1* e o maior valor bruto é *2*. Em seguida, utilizou-se essa classificação para fazer a mesma avaliação da tabela anterior, logo, nota-se que a diferença entre as avaliações diminui de forma significativa, fazendo com que o menor avaliado tenha uma possibilidade maior de ser escolhido, comparado com a tabela anterior. Desse modo, mantém-se a diversidade da população e aumenta-se a possibilidade de encontrar uma melhor solução.

3.5.2 Seleção por Torneio

A seleção de torneio é muito parecida com a de ranking, porém, é a mais utilizada, pois a mesma escolhe indivíduos aleatórios, e a partir deles, aplica-se a avalição somente a partir dessa geração e selecionando de forma direta os indivíduos com maiores avaliações para dar origem a nova geração. Também, por não organizar os cromossomos, ele exige menos tempo de processamento do algoritmo, caso a população seja muito grande, a diferença do tempo de processamento seria grande.

Segundo Mendonça (2004, p.10), “[...] na seleção por torneio são selecionados aleatoriamente N indivíduos da população. Dentre esses, o indivíduo de maior aptidão é escolhido. O usual é utilizar para N o valor 2. Para valores maiores de N a pressão de seleção aumenta.”. O autor (2004, p.8) define, “[...]pressão de seleção é a relação entre a maior aptidão e a aptidão média na população. Se para alguns indivíduos a função objetivo tiver valores muito elevados em relação ao restante da população a pressão de seleção será grande...”.

Na seleção por torneio se inicia uma escolha aleatória. Desse modo, esses indivíduos serão a primeira geração, ou seja, a função avaliação só é aplicada neles e em suas gerações seguintes.

3.5.3 Seleção por Roleta

O AG original de Holland utiliza o método da roleta, na qual cada indivíduo pega uma proporção da roleta conforme a sua avaliação. No método da roleta tradicional, a chance de cada indivíduo ser selecionado é a sua avaliação dividido sobre a soma da avaliação de todos os indivíduos. Esse método, por definição, não aceita valores negativos, descartando os mesmos.

Sendo assim, necessita-se acrescentar um comando que ao se deparar com valor negativo, deve-se descartar esse valor para não interferir na avalição. Logo, o cromossomo que apresentar a solução negativa será descartado, assim, ao aplicar a função avaliação, não haverá nenhum problema, tendo em vista que nessa seleção se usa o somatório de todos os indivíduos com soluções positivas, de todas gerações.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesse capítulo será apresentada a metodologia presente no trabalho e os procedimentos metodológicos usados para se atingir os objetivos propostos.

4.1 METODOLOGIA ADOTADA

A metodologia desse trabalho busca sanar dúvidas sobre confiabilidade dos cálculos aos métodos tecnológicos alternativos. Para isso, procurou-se encontrar uma melhor coordenação com a finalidade de se concluir com precisão, visto que segundo Gil (2010) e Vergara (2006), a metodologia das pesquisas científicas pode ser classificada e definida conforme sua abordagem, finalidade e procedimentos técnicos empregados.

Trata-se este projeto como pesquisa devido às análises dos problemas utilizados e da forma como se pode solucioná-los. “Pode-se definir pesquisa como o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa é requerida quando não se dispõe de informação suficiente para responder ao problema, ou então quando a informação disponível se encontra em tal estado de desordem que não possa ser adequadamente relacionada ao problema” (GIL, 2002).

Considerando-se que o trabalho possui como característica principal uma comparação entre o cálculo diferencial e algoritmos genéticos, entende-se ser uma pesquisa descritiva aproximada de uma pesquisa exploratória, uma vez que uma pesquisa descritiva busca analisar e caracterizar os dados coletados. Segundo Gil (2002, p.42):

> “As pesquisas descritivas têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis. São inúmeros os estudos que podem ser classificados sob este título e uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados, tais como o questionário e a observação sistemática”...“há, porém, pesquisas que, embora definidas como descritivas com base em seus objetivos, acabam servindo mais para proporcionar uma nova visão do problema, o que as aproxima das pesquisas exploratórias”.

Já a pesquisa exploratória propõe deixar o problema, neste caso, o método, mais explícito, e é seguido de hipóteses e aprimoramento de ideias. Para isso, Gil (2002), citando Selltiz (1967), afirma que “estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado. Na maioria dos casos, essas pesquisas envolvem: (a) levantamento bibliográfico; (b) entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado; e (c) análise de exemplos que "estimulem a compreensão" (Selltiz et al., 1967, apud Gil (2002)).”

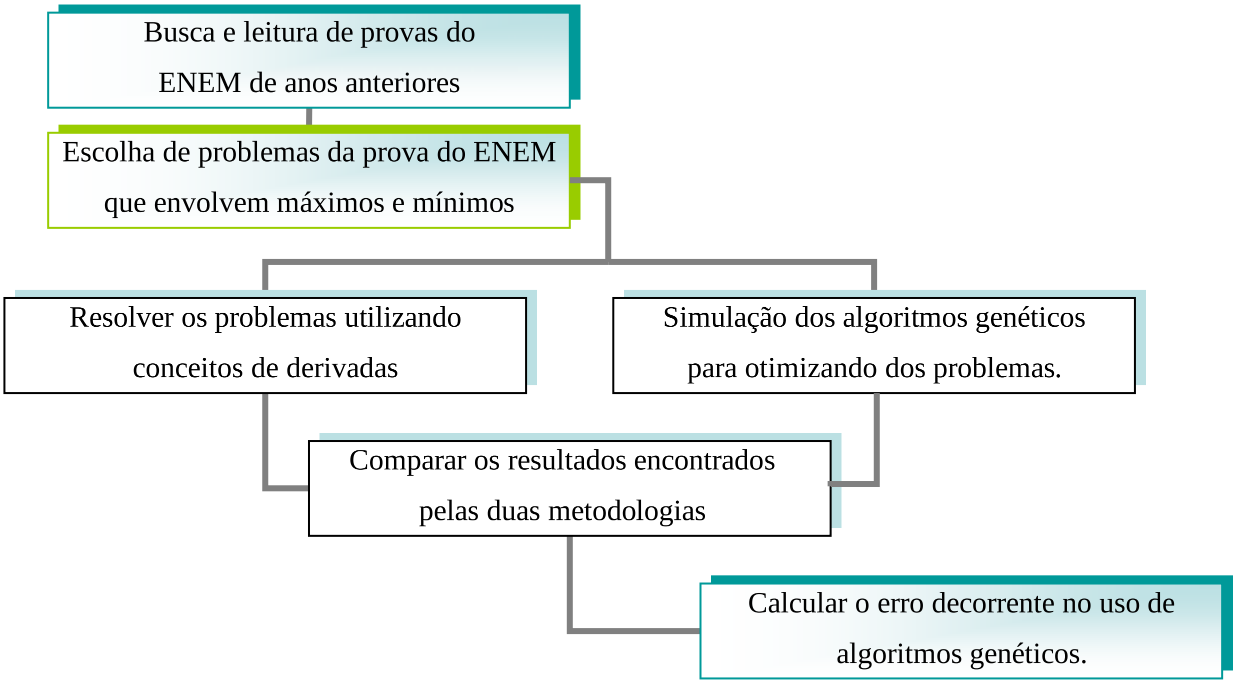
Importante destacar o que ensina Yin (2001) apud Gil (2002):

> Nas ciências, durante muito tempo, o estudo de caso foi encarado como procedimento pouco rigoroso, que serviria apenas para estudos de natureza exploratória. Hoje, porém, é encarado como o delineamento mais adequado para a investigação de um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto real, onde os limites entre o fenômeno e o contexto não são claramente percebidos (YIN, 2001).

O trabalho, então, se aproxima de um estudo de caso desenvolvido através de explorações e descrições dos problemas, dado que é voltado à análise dos resultados finais trabalhados no mesmo ao se comparar os resultados obtidos pelos dois métodos de cálculo.

4.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos metodológicos usados para este trabalho foram divididos em etapas, bem como na representação do fluxograma abaixo.



Nesse sentido, as etapas seguidas para se atingir os objetivos propostos nesse trabalho de conclusão de curso podem ser vistas conforme descrito abaixo:

1. Buscou-se na internet as provas do ENEM de anos anteriores que contivessem problemas de funções polinomiais envolvendo máximos e mínimos para que eles fossem solucionados por dois métodos estudados neste trabalho.

2. Selecionou-se, dentre os problemas de máximos e mínimos encontrados, dois que eram viáveis de serem resolvidos manualmente pelos métodos abordados neste trabalho.

3. Esses problemas foram escolhidos e resolvidos de forma manual pelo método dos algoritmos genéticos, através de tabelas no software *Excel*, e, na sequência, utilizando conceitos de cálculo diferencial abordados nas sessões anteriores.

4. Em seguida, comparou-se os resultados encontrados em cada um dos dois métodos utilizados, analisando as etapas ao longo de suas otimizações, para se buscar a conclusão relacionada ao tema.

5. Calculou-se o erro decorrente no uso dos algoritmos genéticos, visto que por se tratar um método computacional e que utiliza mutações e recombinações para se encontrar a resolução, pode-se resultar num valor próximo ao esperado, já que ao se resolver com cálculo diferencial, encontramos valores exatos.

5 ANÁLISE DA PESQUISA/RESULTADOS

Este item faz a apresentação dos dois problemas selecionados em provas do ENEM, voltados a máximos e mínimos de funções polinomiais, e faz a demonstração da resolução pelos dois métodos estudados ao longo deste trabalho.

5.1 LUCRO COM AUMENTO DA PRESTAÇÃO DE SERVIÇO X PERDA DA CLIENTELA

(ENEM) *A única fonte de renda de um cabeleireiro é proveniente de seu salão. Ele cobra R$ 10,00 por cada serviço realizado e atende 200 clientes por mês, mas está pensando em aumentar o valor cobrado pelo serviço. Ele sabe que cada real cobrado a mais acarreta uma diminuição de 10 clientes por mês. Para que a renda do cabeleireiro seja máxima, ele deve cobrar por serviço o valor de:*

a) R$ 10,00
b) R$ 10,50
c) R$ 11,00
d) R$ 15,00
e) *R$ 20,00*

5.1.1 Resolução com Cálculo Diferencial

Como todo problema matemático, é importante que se faça um levantamento de dados para melhor interpretação do mesmo. Inicia-se apontando o número de clientes mensais que o cabelereiro possui, e que são cobrados R$ 10,00 por serviço realizado, sendo C = 200, para o número de clientes mensais, e, $P = 10$, o preço utilizado. Com isso, pode-se separar duas funções de primeiro grau

$$a(x) = 200 - 10x$$

Sendo esta para representar o número de clientes perdidos por cada real acrescido no valor da prestação de serviço e

$$b(x) = 10 + x$$

Para representar o valor que se aumentou na prestação do serviço. Pode-se, então, juntar as duas funções por meio do produto das equações já encontradas, onde se obtém:

$$L = -10x^2 + 100x + 2000$$

E para sua resolução através do cálculo diferencial, tem-se:

$$L = -10x^2 + 100x + 2000$$

$$L' = (2).(-10x) + 100$$

$$L' = -20x + 100$$

Logo, através da função descoberta, podemos encontrar o lucro máximo para o problema.

$$-20x + 100 = 0$$

$$100 = 20x$$

$$\frac{100}{20} = x$$

$$5 = x$$

Sendo assim, pode-se concluir que um aumento de R$ 5,00 no valor do serviço prestado pelo cabeleireiro faria com que sua renda fosse máxima.

Nota-se que no enunciado do problema não se encontra alternativa correspondente ao resultado encontrado. Isso se deve ao fato de o valor encontrado se relacionar ao acréscimo do valor do serviço prestado pelo cabeleireiro, cujo mesmo já era de R$ 10,00, encontrando, então, como resposta, a letra *d)* R$ 15,00.

5.1.2 Resolução com Algoritmos Genéticos

Antes de iniciar, deve-se lembrar que ao reproduzir o algoritmo manual, será feito alguns processos de forma intuitiva, pois se aplicado no algoritmo seria necessário um determinado comando para realizar tal processo, além do fato de que muitos dos processos do algoritmo ainda não se sabe exatamente quando e nem quantas vezes são aplicados. Logo, alguns processos serão ignorados ou não utilizados, como, por exemplo, ao iniciar o algoritmo se adiciona um limite de gerações, uma taxa de mutação (de *0,5%* até *1%*), entre outros.

Visto que esses processos são feitos para o algoritmo trabalhar com uma população muito grande, nesse caso há necessidade desses processos. Como será feito uma aplicação manual, utilizando apenas um intervalo, não há necessidade dos mesmos.

Para solução e aplicação dos algoritmos genéticos, será feito manualmente através de planilhas eletrônicas do *Excel*, realizando e demonstrando todos os processos do próprio algoritmo. Antes de começar, é preciso adaptar os dados do problema com o algoritmo. Sendo assim será utilizado a codificação binária para os cromossomos, necessita-se de uma tabela com a codificação das transformações binárias.

Figura 14 – Tabela de números binários.

BINARIOS	DECIMAL	PALAVRA
00000	0	
00001	1	A
00010	2	B
00011	3	C
00100	4	D
00101	5	E
00110	6	F
00111	7	G
01000	8	H
01001	9	I
01010	10	J
01011	11	K
01100	12	L
01101	13	M
01110	14	N
01111	15	O

BINARIOS	DECIMAL	PALAVRA
10000	16	P
10001	17	Q
10010	18	R
10011	19	S
10100	20	T
10101	21	U
10110	22	V
10111	23	W
11000	24	X
11001	25	Y
11010	26	Z
11011	27	?
11100	28	!
11101	29	.
11110	30	,
11111	31	;

Fonte: Tec Ciencia – Educação, ciência e tecnologia.

Sabendo que o problema trata-se de um acréscimo visando a renda máxima, e que a função do mesmo é $f(x) = -10x^2 + 100x + 2000$, pode-se limitar a aplicação do algoritmo para os valores positivos. Além disso, define-se como função avaliação a porcentagem de cada indivíduo no somatório das soluções, sendo definida pela função

$$\frac{Solução\ x}{W\ Soluções} . 100$$

Convém lembrar que a mesma é dada em porcentagem. Lembrando, também, que para encontrar a solução, o valor do cromossomo decodificado é substituído na equação no lugar de *x*.

Nesse algoritmo, será utilizada sempre a última geração para dar origem a próxima, ou seja, a função avaliação será aplica somente na última geração. Ao final, ao começar a se repetir as soluções ou não haver mais cromossomos para gerar dentro do intervalo proposto, o algoritmo se encerrará. Em seguida, procura-se o a melhor solução.

Inicia-se o algoritmo com a escolha aleatória de quatro indivíduos dentro do intervalo de *0* a *7*, em seguida, aplica-se a função avaliação nos mesmos. Após isto, realiza-se a seleção de pais para que gerem a próxima geração.

Figura 15 – Aplicação da função avaliação na primeira geração.

Geração 1	Indivíduo	Código	Decodi.			Solução	Avaliação
	a	0001	1			2090	23,89%
	b	0011	3			2210	25,26%
	c	0110	6			2240	25,60%
	d	0111	7			2210	25,26%
				Somatório		8750	100,00%

Fonte: Os autores.

Com a avalição dos cromossomos selecionados, aplica-se o crossover em cada par formado, baseado na sua avaliação. Assim, notando que os indivíduos *b* e *d* possuem a mesma solução e a mesma avaliação, foi optado em descartar um deles e em seu lugar, na realização do crossover, repetir o indivíduo com melhor avaliação.

Figura 16 – Dando origem a segunda geração.

Geração 2	Indivíduo	Seleção	Cruzamento	Decode.	Solução	Avaliação	Indivíduo
par 1	c	0110	0110	6	2240	25,87%	a
	d	0111	0111	7	2210	25,52%	b
Par 2	c	0110	0000	0	2000	23,09%	c
	a	0001	0111	7	2210	25,52%	d
				Somatório	8660	100%	

Fonte: Os autores.

Logo após a avaliação dos indivíduos gerados, os mesmos tornam-se os indivíduos *a*, *b*, *c* e *d*, fazendo, assim, a aplicação do crossover e/ou mutação nesses novos indivíduos.

Figura 17 – Dando origem a terceira geração.

Geração 3	Indivíduo	Seleção	Cruzamento	Decodi.	Mutação	Decodi.	Solução	Avaliação
Par 1	b	0111	0110	6	0010	2	2160	24,38%
	a	0110	0111	7	0101	5	2250	25,40%
Par 2	b	0111	0100	4	0100	4	2240	25,28%
	c	0000	0011	3	0011	3	2210	24,94%
					Somatório		8860	100%

Fonte: Os autores.

Ao aplicar o crossover nos indivíduos *a* e *b*, gerou-se indivíduos iguais. Então, para gerar um indivíduo diferente, aplicou-se a mutação em ambos. Desta forma, surgiu dois novos cromossomos. Nota-se que todos os cromossomos do intervalo foram gerados e aplicados, logo, deve-se procurar em todas as gerações a melhor solução (lucro máximo). Observa-se, também, que as soluções cresciam até o cromossomo *5*, após o mesmo, passou a decrescer. Logo, o lucro máximo converge ao cromossomo *5*. Ao encontrar a melhor solução, encerra-se a aplicação do algoritmo genético.

Figura 18 – Destacando valor máximo encontrado.

Mutação	Decodi.	Solução	Avaliação
0010	2	2160	24,38%
0101	5	2250	25,40%
0100	4	2240	25,28%
0011	3	2210	24,94%
Somatório		8860	100%

Fonte: Os autores.

Logo, o valor que pode ser acrescentado no preço é de R$ 5,00, ficando, assim, o preço total pelo serviço de R$ 15,00 e retornando uma receita máxima de R$ 2.250,00. Sendo assim, a alternativa *d)* corresponde a solução do problema.

5.2 LUCRO OBTIDO NA QUANTIDADE DE MATERIAL POR PACOTE

(ENEM) *Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão L(x) = – x² + 12x – 20, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a:*

a) 04.
b) 06.
c) 09.
d) 10.
e) *14.*

5.2.1 Resolução com Cálculo Diferencial

Nota-se que para este problema, o próprio enunciado já impõe a função na qual se encontra o lucro máximo, sendo ela:

$$L(x) = -x^2 + 12x - 20$$

Então, para sua resolução, tem-se:

$$L(x) = -x^2 + 12x - 20$$

$$L'(x) = (2).(-x) + 12$$

$$L'(x) = -2x + 12$$

Logo, por meio da função descoberta, é possível definir o lucro máximo (ponto máximo) a se encontrar.

$$0 = -2x + 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Contudo, para se obter o lucro máximo na venda dos pacotes de bonés, a empresa deve vender pacotes com 6 unidades de bonés. Sendo assim, a alternativa *b)* corresponde a solução do problema.

5.2.2 Resolução com Algoritmos Genéticos

Esse problema parece ser mais simples, uma vez que já informa que a função $L(x) = -x^2 + 12x - 20$ soluciona o mesmo. Então, serão utilizados os mesmos processos de resolução do problema anterior no tópico 5.1.2, inclusive a função avaliação.

Como o método será o mesmo, utiliza-se a Figura 14 mais uma vez para codificação em binários. Em seguida, serão selecionados, de forma aleatória, quatro indivíduos no intervalo de *0* a *13*. Após o mesmo, será aplicada a função avaliação para a seleção dos pais com melhor avaliação na mesma.

Figura 19 – Aplicando função avaliação na primeira geração.

Geração 1	Individuo	Código	Decodi.	Solução	Avaliação
	a	0001	1	-9	-36,00%
	b	0011	3	7	28,00%
	c	0101	5	15	60,00%
	d	1000	8	12	48,00%
		Somatório		25	100,00%

Fonte: Os autores.

Para essa geração percebeu-se a presença de uma solução negativa, tendo efeito no somatório, atrapalharia o desempenho do algoritmo. Logo, é necessária a troca do método de seleção, assim, utilizando o método da roleta, conforme tópico **3.5.3**, pois os mesmos não lidam com valores negativos, assim, os descartando. Desse modo, não será imitado o processo de seleção da roleta por completo, uma vez que será feito somente a avaliação da mesma para descartar as soluções negativas, tendo em vista que será apresentado o gráfico após encerrar o algoritmo.

Deve-se lembrar que no algoritmo seria necessário, ao alterar para o método da roleta, criar um comando para excluir ou descartar as soluções negativas. Nesse algoritmo manual, será descartado e substituído por outro valor quando houver valores de forma intuitiva.

Figura 20 – Aplicando método da seleção por roleta.

Geração 1	Individuo	Código	Decodi.	Solução	Avaliação
	a	0010	2	0	0,00%
	b	0011	3	7	20,59%
	c	0101	5	15	44,12%
	d	1000	8	12	35,29%
		Somatório		34	100,00%

Fonte: Os autores.

Note-se que, como *2* foi avaliado em *0%* e *1* já foi descartado, pode-se descartar o *0* também, uma vez que o problema trata-se de uma equação de 2º grau. Nesse caso, serão utilizados os três cromossomos restantes, repetindo o maior avaliado.

Figura 21 – Dando origem a segunda geração.

Geração 2	Indivíduo	Seleção	Decodi.	Cruzamento	Decodi.	Mutação	Decodi	Solução
par 1	c	0101	5	0001	1	1001	9	7
	d	1000	8	1100	12	1100	12	-20
Par 2	b	0011	3	0101	5	0111	7	15
	c	0101	5	0011	3	1011	11	-9
							Somatório	-7

Fonte: Os autores.

Note-se que o somatório ficou negativo. Nesse caso não há problema, uma vez que os negativos serão descartados. Contudo, percebe-se que a partir do cromossomo *11*, as soluções começam a decrescer, permanecendo no negativo. Logo, pode-se descartar as mesmas. Ficando, assim, o intervalo do algoritmo definido como do cromossomo *3* até o *9*.

Para a próxima geração, há necessidade de aplicar roleta em todos os cromossomos válidos, em seguida, selecionar os melhores avaliados para dar origem a nova geração.

Figura 22 – Tabela avaliação por roleta.

Avaliação		
Cromossomo	Solução	Avaliação
3	7	12,50%
5	15	26,79%
8	12	21,43%
9	7	12,50%
7	15	26,79%
Somatório	56	100%

Fonte: Os autores.

Para essa geração, serão utilizados os cromossomos *5*, *7*, *8* e *9*, mesmo o *3* tendo mesma avaliação que o *9*, poderia ter sido o mesmo.

Figura 23 – Dando origem a terceira geração.

Geração 3	Indivíduo	Seleção	Decodi.	Cruzamento	Decodi.	Mutação	Decodi	Solução
par 1	a	0101	5	0001	1	1001	9	7
	b	1001	9	1101	13	0101	5	15
Par 2	c	0111	7	0001	1	0011	3	7
	d	1000	8	1110	14	1010	10	0
							Somatório	29

Fonte: Os autores.

Observa-se que surgiu o cromossomo *10*, porém, assim como o *2*, sua solução é *0* e sua avaliação é *0%*, logo, será descartado também. Note-se que os cromossomos ainda não encontrados dentro do intervalo são *4* e *6*.

Para a próxima geração, as avaliações permanecem as mesmas apresentadas na Figura 22. Logo, para não gerar os mesmos indivíduos, será feito cruzamento entre os dois cromossomos melhores avaliados e o cromossomo *3*, o qual não havia sido utilizado na última geração.

Figura 24 – Dando origem a quarta geração.

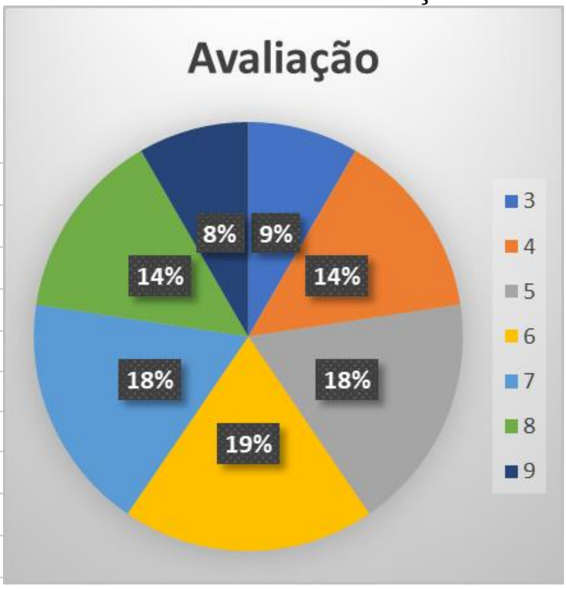
Geração 4	Indivíduo	Seleção	Decodi.	Cruzamento	Decodi.	Mutação	Decodi	Solução
par 1	a	0101	5	0011	3	0011	3	7
	b	0011	3	0101	5	0100	4	12
Par 2	c	0111	7	0011	3	0011	3	7
	d	0011	3	0111	7	0110	6	16
							Somatório	42

Fonte: Os autores.

Nessa geração encontramos todos os cromossomos do intervalo do algoritmo. Sendo assim, deve-se procurar a melhor solução, que desta vez será também a maior avaliação na roleta.

Figura 25 – Representação da roleta ao final de todas as avaliações.

Avaliação		
Cromossomo	Solução	Avaliação
3	7	8,33%
4	12	14,29%
5	15	17,86%
6	16	19,05%
7	15	17,86%
8	12	14,29%
9	7	8,33%
Somatório	84	100%



Fonte: Os autores.

Por fim, encontra-se o melhor resultado e encerra-se o algoritmo genético. Logo, conclui-se que a melhor solução é *6*. Ou seja, são necessários *6* bonés por pacote para obter o lucro máximo de R$ 16,00, tendo como resposta do problema a alternativa *b)*.

5.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS

Com os resultados obtidos utilizando conceitos de cálculo diferencial e conceitos de algoritmos genéticos para o cálculo dos pontos críticos de uma função polinomial, pode-se observar, ao se solucionar os dois problemas propostos nas provas do ENEM, que:

A) No problema 01, a solução encontrada para o método das derivadas foi exatamente a mesma para o método utilizando algoritmos genéticos. Observou-se que, após algumas gerações, o resultado se tornava constante, sendo, portanto, desnecessário continuar o processo. Nesse caso, o erro de cálculo foi 0% pois os resultados foram iguais.

B) No problema 02, agora utilizando o método da roleta, o valor encontrado para o método das derivadas também foi exatamente igual ao valor encontrado pelo método dos algoritmos genéticos, gerando um erro também nulo, quando se compara os 2 métodos.

Convém ressaltar que, em uma implementação computacional, problemas mais robustos podem aparecer, de funções polinomiais de grau muito superior, e além da possibilidade de se estabelecer o número de gerações que se deseja (o que pode ser algo muito grande), os resultados podem aparecer na forma decimal, sendo, desta forma, possível de se calcular o erro relativo corresponde ao valor real e ao valor encontrado pelo algoritmo.

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho envolveu duas áreas de conhecimento, o cálculo de pontos críticos de funções utilizando derivadas e os algoritmos genéticos presentes na computação evolutiva, ambos apresentando fortes conexões no uso da matemática. Buscou-se comparar as soluções que se obtinha na resolução de dois problemas de máximos e mínimos ao se utilizar essas duas distintas áreas de conhecimento.

Os problemas propostos, abordados em provas do ENEM, trabalham diretamente com situações que buscam encontrar o ponto de máximo ou o ponto de mínimo da função. A nível de ensino médio, ambos problemas poderiam ser perfeitamente solucionados utilizando as equações de vértice da curva, temática trabalhada inclusive no ensino fundamental.

A nível de ensino superior, é recorrente o uso de derivadas para encontrar os máximos e mínimos de funções de uma ou mais variável. O cálculo dos pontos críticos é algo extremamente simples de se encontrar quando se utiliza conceitos de cálculo diferencial.

Já o uso de algoritmos genéticos, área da inteligência artificial relativamente nova e em grande crescimento, tem-se mostrado bastante aderente à resolução de problemas de máximos e mínimos, onde, usando como pano de fundo a teoria da seleção natural de Charles Darwin, o algoritmo varre um intervalo numérico, testando as mais diversas soluções possíveis, e selecionando para as gerações seguintes aquelas que mais se ‘adaptaram’ ao problema, ou seja, aquelas que apresentaram as melhores soluções possíveis.

Verificou-se então, ao término desse trabalho de conclusão de curso, que o uso de derivadas para se encontrar os pontos críticos dos problemas propostos mostrou-se mais simples e rápido de se fazer, quando comparado com o uso de algoritmos genéticos, contudo, é importante lembrar, que quando a derivada da função em estudo é de difícil obtenção, essa ferramenta de inteligência artificial é extremamente valiosa e mais eficaz.

Percebeu-se ainda que, quando se buscou comparar as diferenças nas soluções obtidas pelos dois métodos para os dois problemas, os resultados foram iguais, contudo, em geral, o algoritmo genético vai fornecer uma solução aproximada para o problema, cujo erro relativo decorrente de seu uso pode ser determinado.

Nesse caso, esse trabalho apresenta algumas limitações, como por exemplo, a necessidade de se estabelecer, para os algoritmos genéticos, um intervalo de soluções do qual sairão as gerações futuras, impedindo que o algoritmo trabalhe em todo o campo dos reais. Isso se deve principalmente ao aumento das gerações, e do trabalho manual, caso aumentássemos o intervalo de soluções possíveis para os problemas.

Outra limitação é o fato de se trabalhar, nos dois problemas apresentados, com soluções naturais, facilitando a interpretação, manipulação e o surgimento de gerações futuras no algoritmo genético, o que no mundo real, isso nem sempre acontece.

Como sugestões para trabalhos futuros, propõe-se a implementação desses problemas, em ambiente computacional, com o objetivo de verificar se as soluções são encontradas com o mesmo número de gerações aqui apresentadas, assim como a resolução de problemas que a solução não necessariamente seja um número natural, mas sim um racional.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; Bivens, Irl. Davis, Stephen. **Cálculo.** 8ª ED. Porto Alegre: Bookman, 2007

BARBOSA, H. J. C. **Introdução aos algoritmos genéticos**. SBMAC, 1997

BRUCHÊZ, Adriane; D'AVILA, Alfonso Augusto Fróes; FERNANDES, Alice Munz, CASTILHOS, Nádia Cristina; OLEA, Pelayo Munhoz. **Metodologia de Pesquisa de Dissertações sobre Inovação:** Análise Bibliométrica.

DASGUPTA, S; PAPADIMITRIOU, C.H; VAZIRANI, U.V.. **Algorithms**. Copyright, 2006.

DUGAN, N., ERKOÇ, S. **Genetic Algorithms in Application to the Geometry Optimization of Nanoparticles**. Algorithms 2: 410-428, 2009.

FEITOSA, Maria Aparecida Freire. **Um estudo das derivadas para o cálculo de máximos e mínimos.** Monteiro, Paraíba, 2010.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A:** Funções, limite, derivação e integração. 6ª Ed.

FREITAS, Maria Teresa Menezes. **Matemática para administradores.** PNAP: UFSC, 2014

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 5ª Ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2010.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4ª Ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2002.

GOLDBARG, M. C. e PACCA, H. L. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear:** Modelos e Algoritmos. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2000.

Grupo de Pesquisas em computação Evolutiva. **Computação evolutiva**. Departamento de Informática – Universidade Federal do Paraná. Disponível em: http://www.inf.ufpr.br/aurora/tutoriais/Ceapostila.pdf. Acesso em: 31 de out. 2019.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. Vol. 4. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

HAUPT, Randy L. e HAUPT, Sue E. **Practical Genetic Algorithm**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

IZABEL. **Termos usados em genética**. Blogspot. 2011. Disponível em: professorabiologiaizabel.blogspot.com/2011/03/termos-usados-em-genetica.html. Acessado em: 29 de nov. de 2019.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**, Vol. 2. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LINDEN, Ricardo. **Algoritmos Genéticos**. 1. Ed. Rio de Janeiro: Editora Brasport, 2006.

LINDEN, Ricardo. **Algoritmos Genéticos**. 2. Ed. Rio de Janeiro: Editora Brasport, 2008.

KOZA, J. R. **Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection**. MIT Press, 1992.

MARCOLINO, Fabiano Rodrigues. **Máximos e mínimos:** Abordagem na educação básica. – Brasília, 2016.

MARQUES, G. C. **Fundamentos de Matemática I**. 1. ed. SÃO PAULO: Editora da Universidade de São Paulo, 2014. 460p.

MELANIE, M. **An Introduction to Genetic Algorithms**. [S.l.]: A Bradford Book The MIT Press, 1996.

MENDONÇA, Carlos Eduardo Luz Riodades de. **Um sistema computacional para otimização através de algoritmos genéticos e redes neurais**. 2004. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

MITCHELL, M. **An introduction to genetic algorithms**. Cambridge: Mit Press. 1997. 207 p.

OBITKO, Marek. **Introdução aos algoritmos genéticos**. 1998. Disponível em: https://www.obitko.com/tutorials/genetic-algorithms/portuguese/selection.php. Acesso em: 31 de out. 2019.

O'NEIL, M. & RYAN, C. **Grammar based function definition in Grammatical Evolution. Proceedings of the 5th Annual Conference in Genetic Programming**. (GECCO 2000). MIT Press, 2000.

PAIVA, Maryna de Oliveira. **Aplicações do estudo da derivada no nível básico de ensino associado a resolução de questões de máximos e mínimos.** Brasília, 2015.

PINTO, Márcia Maria Fusaro e ERCOLE, Grey. **Introdução ao cálculo diferencial**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, Vanessa Sardinha Dos. **O que é cromossomo?**. Brasil Escola. [2016?]. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/biologia/o-que-e-cromossomo.htm. Acesso em: 29 de nov. 2019.

SELLTIZ, Claire et ai. **Métodos de pesquisa nas relações sociais.** São Paulo: Herder, 1967

SILVA, Deam J.A. **Algoritmos culturais com abordagem mimética e multipopulacional aplicados em problemas de otimização**. 2012. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2012.

SIQUEIRA JUNIOR, Erinaldo Leite. **Uso de algoritmo genético no ajuste linear através de dados experimentais**. 2015. Tese (Mestrado PROFMAT) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

SOUZA, Gustavo Pinho Kretzer de. **Otimização de funções reais multidimensionais utilizando algoritmo genético contínuo**. 2014. TCC (Bacharel em Ciências da Computação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

STEWART, James. **Cálculo**. Vol. 1. São Paulo: Trilha, 2013

TECCIENCIA– Educação, ciência e tecnologia. **Números binários**. Departamento de ciências da computação – Universidade Federal da Bahia. Disponível em: http://teccienciapiloto.ufba.br/numeros-binarios. Acesso em: 14 de nov. 2019.

VERGARA, S. C. **Projetos e relatórios de pesquisa em administração**. São Paulo: Atlas, 2006.

YIN, R. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 5.ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.